УДК 517.977.56 Вестник СПбГУ. Прикладная математика... 2017. Т. 13. Вып. 2

В. В. Провоторов[1], *Е. Н. Провоторова*[2]

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ГРАФЕ

[1] Воронежский государственный университет, Российская Федерация, 394006, Воронеж, Университетская площадь, 1
[2] Воронежский государственный технический университет, Российская Федерация, 394026, Воронеж, Московский пр., 14

Рассмотрена распространенная в приложениях задача оптимального граничного управления параболической системой с запаздыванием и распределенными параметрами на графе. Состояние системы определяется слабым решением начально-краевой задачи для параболического уравнения в пространстве соболевского типа, управляющее воздействие на систему и наблюдение за ее состоянием осуществляются в граничных узлах графа на всем временном промежутке. Сопряженное состояние системы обусловливается также слабым решением начально-краевой задачи с запаздыванием и распределенными параметрами на графе с финальным условием. Получены необходимые и достаточные условия существования оптимального управления с использованием сопряженного состояния системы, решена задача синтеза оптимального управления для случая отсутствия ограничений на управляющие воздействия и получен аналог известных для конечномерного случая результатов Калмана. Используемый метод применим ко многим задачам оптимизации дифференциальных систем, состояние которых определяется слабыми решениями эволюционных уравнений на сетях. Представленные результаты являются основополагающими при исследовании задач граничного управления динамикой ламинарных течений многофазных сред. Библиогр. 20 назв.

Ключевые слова: начально-краевая задача, распределенные параметры на графе, слабые решения, оптимальное граничное управление, синтез управления.

V. V. Provotorov[1], *E. N. Provotorova*[2]

SYNTHESIS OF OPTIMAL BOUNDARY CONTROL OF PARABOLIC SYSTEMS WITH DELAY AND DISTRIBUTED PARAMETERS ON THE GRAPH

[1] Voronezh State University, 1, Universitetskaya square, Voronezh, 394006, Russian Federation
[2] Voronezh State Technical University, 14, Moskovskii pr., Voronezh, 394026, Russian Federation

The problem of optimal boundary control of evolutionary systems with constant delay and distributed parameters on the graph. System status is determined by a weak solution of the boundary value problem for a parabolic equation in the space of Sobolev type whose elements are functions satisfying the conditions in a certain way matching all the internal nodes of the

---

Провоторов Вячеслав Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор; wwprov@ mail.ru

Провоторова Елена Николаевна — кандидат физико-математических наук, доцент; enprov@ mail.ru

Provotorov Vyacheslav Vasil'evich — doctor of physical and mathematical sciences, professor; wwprov@mail.ru

Provotorova Elena Nikolaevna — PhD of physical and mathematical sciences, assistant professor; enprov@mail.ru

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2017

DOI: 10.21638/11701/spbu10.2017.207

graph. The control action on the system and monitoring its state is made in the boundary nodes of the graph on the entire time interval. The dual status of the system is defined as a weak solution of the boundary value problem with delay and distributed parameters on the graph with the final condition. The conditions of weak unique solvability of the original and the dual challenges of weak continuous dependence of solutions on initial data. We present necessary and sufficient conditions for the existence of optimal control using the dual system state solved the problem of optimal control synthesis for the case of absence of restrictions on the control action and an analogue-known finite-dimensional case the Kalman results. The method used is applicable to many optimization problems of differential systems whose state is determined by weak solutions of evolution equations on networks. These results are fundamental in the study of problems of boundary control the dynamics of laminar flows of multiphase media. All techniques and methods can be used for the numerical solution of optimal control problem under consideration. Refs 20.

Keywords: information networks, differential equations, probability, spreading rumors.

1. Введение. Приведен анализ задачи оптимального граничного управления параболической системой с запаздыванием и распределенными параметрами на графе как продолжение исследований, представленных в работах [1–4], где рассмотрены задачи оптимального стартового управления и смежные вопросы. Состояние системы определяется слабым решением начально-краевой задачи для параболического уравнения, управляющее воздействие на систему и наблюдение за ее состоянием осуществляются в граничных узлах графа на всем временном промежутке. Получены необходимые и достаточные условия существования оптимального управления с использованием сопряженного состояния системы, решена задача синтеза оптимального управления. Результаты являются основополагающими при исследовании задач граничного управления динамикой ламинарных течений многофазных сред.

2. Основные понятия и вспомогательные предложения. Применяются понятия и сохраняются обозначения, принятые в [5, с. 114]: $\partial\Gamma$ и $J(\Gamma)$ — множества граничных и внутренних узлов графа Γ соответственно; Γ_0 — объединение всех ребер, не содержащих концевых точек; $\Gamma_t = \Gamma_0 \times (0,t)$, $\partial\Gamma_t = \partial\Gamma \times (0,t)$ $(t \in [0,T])$. Ребра γ графа Γ ориентированы и параметризуются отрезком $[0,1]$. Введем необходимые пространства: $L_p(\Gamma)$ $(p = 1, 2)$ — банахово пространство измеримых на Γ_0 функций, суммируемых с p степенью (аналогично определяются пространства $L_p(\Gamma_T)$); $L_{2,1}(\Gamma_T)$ — пространство функций из $L_1(\Gamma_T)$ с нормой $\|u\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)} = \int\limits_0^T (\int\limits_\Gamma u^2(x,t)dx)^{1/2}dt$; $W_2^1(\Gamma)$ — пространство функций из $L_2(\Gamma)$, имеющих обобщенную производную первого порядка также из $L_2(\Gamma)$; $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ — пространство функций из $L_2(\Gamma_T)$, имеющих обобщенную производную первого порядка по x, принадлежащую $L_2(\Gamma_T)$ (аналогично вводится пространство $W^1(\Gamma_T)$). Обозначим через $V_2(\Gamma_T)$ множество всех функций $u(x,t) \in W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{2,\Gamma_T} \equiv \max_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(\cdot,t)\|_{L_2(\Gamma)} + \|u_x\|_{L_2(\Gamma_T)} \qquad (1)$$

и сильно непрерывных по t в норме $L_2(\Gamma)$; $L_{2,1}(\Gamma_T)$ — пространство функций $u \in L_1(\Gamma_T)$ с нормой $\|u\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)} = \int\limits_0^T (\int\limits_\Gamma u^2(x,t)dx)^{1/2}dt$.

Рассмотрим билинейную форму $\ell(\mu,\nu) = \int\limits_\Gamma \left(a(x)\frac{d\mu(x)}{dx}\frac{d\nu(x)}{dx} + b(x)\mu(x)\nu(x)\right)dx$ с фиксированными измеримыми и ограниченными на Γ_0 функциями $a(x)$, $b(x)$, суммируемыми с квадратом: $0 < a_* \leqslant a(x) \leqslant a^*$, $|b(x)| \leqslant \beta$, $x \in \Gamma_0$. Из работы

[6, с. 72, лемма 2] следует, что пространство $W_2^1(\Gamma)$ содержит множество $\Omega_a(\Gamma)$ функций $u(x) \in C(\Gamma)$ ($C(\Gamma)$ — пространство непрерывных на Γ функций), удовлетворяющих соотношениям $\sum\limits_{\gamma_j \in R(\xi)} a(1)_{\gamma_j} \frac{du(1)_{\gamma_j}}{dx} = \sum\limits_{\gamma_j \in r(\xi)} a(0)_{\gamma_j} \frac{du(0)_{\gamma_j}}{dx}$ во всех узлах $\xi \in J(\Gamma)$ ($R(\xi)$ и $r(\xi)$ — множества ребер, соответственно ориентированных «к узлу ξ» и «от узла ξ», $u(\cdot)_\gamma$ — сужение функции $u(\cdot)$ на ребро γ). Замыкание в норме $W_2^1(\Gamma)$ множества $\Omega_a(\Gamma)$ обозначим через $W^1(a,\Gamma)$ (если допустить, что функции $u(x)$ из $\Omega_a(\Gamma)$ удовлетворяют еще и краевому условию $u(x)|_{\partial\Gamma} = 0$, то получим пространство $W_0^1(a,\Gamma)$). Пусть далее $\Omega_a(\Gamma_T)$ — множество функций $u(x,t) \in V_2(\Gamma_T)$, чьи следы определены на сечениях области Γ_T плоскостью $t = t_0$ ($t_0 \in [0,T]$) как функции класса $W^1(a,\Gamma)$ и удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{\gamma_j \in R(\xi)} a(1)_{\gamma_j} \frac{\partial u(1,t)_{\gamma_j}}{\partial x} = \sum_{\gamma_j \in r(\xi)} a(0)_{\gamma_j} \frac{\partial u(0,t)_{\gamma_j}}{\partial x} \tag{2}$$

для всех узлов $\xi \in J(\Gamma)$. Замыкание множества $\Omega_a(\Gamma_T)$ по норме (1) обозначим через $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$; ясно, что $V^{1,0}(a,\Gamma_T) \subset W_2^{1,0}(\Gamma_T)$. Другим подпространством пространства $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ является $W^{1,0}(a,\Gamma_T)$ — замыкание в норме $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ множества гладких функций, удовлетворяющих соотношениям (2) для всех узлов $\xi \in J(\Gamma)$ и для любого $t \in [0,T]$ (аналогично вводится пространство $W^1(a,\Gamma_T)$). Отличием элементов пространства $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ от элементов $W^{1,0}(a,\Gamma_T)$ является отсутствие у последних непрерывности по переменной t, соотношение (2) имеет место почти всюду на $(0,T)$.

3. Начально-краевая задача, однозначная слабая разрешимость. В пространстве $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right) + b(x)y(x,t) = f(x,t), \tag{3}$$

представляющее собой систему дифференциальных уравнений с распределенными параметрами на каждом ребре γ графа Γ. Состояние системы (3) в области $\overline{\Gamma}_T$ определяется слабым решением $y(x,t)$ уравнения (3), удовлетворяющим начальному

$$y\,|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \tag{4}$$

и краевому

$$a(x)\frac{\partial y}{\partial x}\,|_{x \in \partial\Gamma_T} = \phi(x,t) \tag{5}$$

условиям. Функция $\phi(x,t)$ является граничным управляющим воздействием на систему (3) (граничным управлением системой (3)), предположения относительно функций $a(x)$, $b(x)$ остаются теми же, что и в п. 2; $f(x,t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$, $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$.

Определение 1. *Слабым решением начально-краевой задачи* (3)–(5) *называется функция* $y(x,t) \in V^{1,0}(a,\Gamma_T)$, *удовлетворяющая интегральному тождеству*

$$\int\limits_{\Gamma} y(x,t)\eta(x,t)dx - \int\limits_{\Gamma_t} y(x,t)\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t}dxdt + \ell_t(y,\eta) =$$

$$= \int\limits_{\Gamma} \varphi(x)\eta(x,0)dx + \int\limits_{\partial\Gamma_t} \phi(x,t)\eta(x,t)dxdt + \int\limits_{\Gamma_t} f(x,t)\eta(x,t)dxdt \tag{6}$$

при любом $t \in [0,T]$ *и для любой функции* $\eta(x,t) \in W^1(a,\Gamma_T)$; $\ell_t(y,\eta)$ — *билинейная форма, определенная соотношением*

$$\ell_t(y,\eta) = \int\limits_{\Gamma_t} \left(a(x)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x} + b(x)y(x,t)\eta(x,t)\right)dxdt.$$

З а м е ч а н и е 1. Интегральное тождество (6) — представление в вариационной форме начально-краевой задачи (3)–(5) [7, с. 129].

Теорема 1. *Начально-краевая задача* (3)–(5) *имеет по крайней мере одно слабое решение в пространстве* $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$.

Предварительно докажем, что задача (3)–(5) разрешима в пространстве $W^{1,0}(a, \Gamma_T)$, затем покажем, что каждое такое решение фактически принадлежит пространству $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$. При этом используются метод Галеркина и специальный базис — система обобщенных собственных функций $\{u_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ краевой задачи (спектральная задача)

$$-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du(x)}{dx}\right) + b(x)u(x) = \lambda u(x), \quad \frac{du(x)}{dx} = 0,$$

в пространстве $W_2^1(a, \Gamma)$, т. е. множество таких чисел λ_n, каждому из которых соответствует по крайней мере одно нетривиальное обобщенное решение $u_n(x) \in W_2^1(a, \Gamma)$, удовлетворяющее тождеству $\ell(u, \eta) = \lambda(u, \eta)$ при любой функции $\eta(x) \in W_0^1(a, \Gamma)$ (здесь и всюду ниже через $(\cdot,\cdot)$ обозначено скалярное произведение в $L_2(\Gamma)$, $L_2(\partial\Gamma_T)$ или $L_2(\Gamma_T)$). Собственные значения λ_n указанной краевой задачи вещественные и имеют конечную кратность, их можно занумеровать в порядке возрастания модулей с учетом кратностей: $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 1}$ (для удобства записи полагаем, что среди $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 1}$ нет равного нулю собственного значения); соответственно нумеруется и множество обобщенных собственных функций. Система $\{u_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ плотна в $W_2^1(a, \Gamma)$ и ортонормирована в $L_2(\Gamma)$ [8, 9]. Не умоляя общности, можно считать краевое условие (5) однородным: $\phi(x, t) = 0$.

Определение 2. *Слабым решением класса* $W^{1,0}(\Gamma_T)$ *начально-краевой задачи* (3)–(5) ($\phi(x, t) = 0$) *называется функция* $y(x, t) \in W^{1,0}(a, \Gamma_T)$, *удовлетворяющая интегральному тождеству*

$$-\int\limits_{\Gamma_T} y(x,t)\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}dxdt + \ell_T(y, \eta) = \int\limits_{\Gamma} \varphi(x)\eta(x,0)dx + \int\limits_{\Gamma_T} f(x,t)\eta(x,t)dxdt \qquad (7)$$

для любой $\eta(x, t) \in W^1(a, \Gamma_T)$, *равной нулю при* $t = T$.

Теорема 2. *Начально-краевая задача* (3)–(5) ($\phi(x, t) = 0$) *имеет по крайней мере одно слабое решение в пространстве* $W^{1,0}(a, \Gamma_T)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения 2 вытекает, что множество слабых решений задачи (3)–(5) ($\phi(x, t) = 0$) линейно. Возьмем ортонормальную в $L_2(\Gamma)$ систему обобщенных собственных функций $\{u_n(x)\}_{n\geqslant 1} \subset W^1(a, \Gamma)$ и будем искать приближенные решения $y^N(x, t)$ в виде $y^N(x, t) = \sum\limits_{i=1}^{N} c_i^N(t)u_i(x)$ ($c_i^N(t)$ — абсолютно непрерывные на $[0, T]$ функции: $c_i'(t) \in L_2(0, T)$) из системы соотношений

$$\left(\frac{\partial y^N}{\partial t}, u_i\right) + \int\limits_{\Gamma}\left(a(x)\frac{\partial y^N(x,t)}{\partial x}\frac{du_i(x)}{dx} + b(x)y^N(x,t)u_i(x)\right)dx = (f, u_i)\,, \quad i = \overline{1, N}, \qquad (8)$$

и равенств

$$c_i^N(0) = (\varphi, u_i)\,, \quad i = \overline{1, N}. \qquad (9)$$

Соотношения (8), (9) суть задача Коши на интервале $[0, T)$ для системы N линейных дифференциальных уравнений относительно $c_i^N(t)$ ($i = \overline{1, N}$). Так как свободные члены являются суммируемыми функциями на $(0, T)$ ($f(x, t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$), N-матрица $\|(u_i, u_j)\|$ — неособенная, то задача Коши (8), (9) имеет единственное решение $c_i^N(t)$ ($i = \overline{1, N}$).

Получим оценки для $y^N(x,t)$, не зависящие от N. Умножив соотношение (8) на $c_i(t)$, просуммировав по $i = \overline{1,N}$ и интегрируя по t от 0 до $t \leqslant T$, приходим к равенству

$$\frac{1}{2}\|y^N(x,t)\|^2_{L_2(\Gamma)} + \int\limits_{\Gamma_t} \left(a(x)(\frac{\partial y^N(x,t)}{\partial x})^2 + b(x)(y^N(x,t))^2 \right) dxdt =$$

$$= \frac{1}{2}\|y^N(x,0)\|^2_{L_2(\Gamma)} + \int\limits_{\Gamma_t} f(x,t) y^N(x,t) dxdt.$$

Для последнего соотношения справедливы оценки

$$\frac{1}{2}\|y^N(x,t)\|^2_{L_2(\Gamma)} + a_* \|\frac{\partial y^N}{\partial x}\|^2_{L_2(\Gamma_t)} \leqslant$$

$$\leqslant \beta \|y^N\|^2_{L_2(\Gamma_t)} + \frac{1}{2}\|y^N(x,0)\|^2_{L_2(\Gamma)} + \|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_t)} \max_{0\leqslant\tau\leqslant t} \|y^N(x,\tau)\|_{L_2(\Gamma)}.$$

Далее при $t \in [0,T]$ находим

$$\|y^N(x,t)\|^2_{L_2(\Gamma)} + 2a_* \|\frac{\partial y^N}{\partial x}\|^2_{L_2(\Gamma_t)} \leqslant 2\beta t z^2(t) + z(t)\|y^N(x,0)\|_{L_2(\Gamma)} + 2z(t)\|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_t)},$$

здесь $\|y^N\|^2_{L_2(\Gamma_t)}$ заменено на $tz^2(t)$, $\|y^N(x,0)\|^2_{L_2(\Gamma)}$ — на $z(t)\|y^N(x,0)\|_{L_2(\Gamma)}$ и $z(t) = \max\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t} \|y^N(x,\tau)\|_{L_2(\Gamma)}$. Отсюда вытекают два неравенства

$$z^2(t) \leqslant J(t), \quad \|\frac{\partial y^N}{\partial x}\|^2_{L_2(\Gamma_t)} \leqslant \frac{1}{2a_*} J(t)$$

$(J(t) = 2\beta t z^2(t) + z(t)\|y^N(x,0)\|_{L_2(\Gamma)} + 2z(t)\|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_t)})$, из которых следует оценка

$$\|y^N\|_{2,\Gamma_t} = z(t) + \|\frac{\partial y^N}{\partial x}\|_{L_2(\Gamma_t)} \leqslant (1 + \frac{1}{\sqrt{2a_*}}) J^{1/2}(t) \leqslant$$

$$\leqslant (1 + \frac{1}{\sqrt{2a_*}}) \left(\sqrt{2\beta t}\ \|y^N\|_{2,\Gamma_t} + \left(\|y^N(x,0)\|_{L_2(\Gamma)} + 2\|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_t)}\right)^{1/2} \sqrt{\|y^N\|_{2,\Gamma_t}} \right)$$

или для $t = t^* < \frac{a_*}{\beta(1+\sqrt{2a_*})^2}$

$$\|y^N\|_{2,\Gamma_t} \leqslant \left(1 - (1 + \frac{1}{\sqrt{2a_*}})\sqrt{2\beta t}\right)^{-2} \left(\|y^N(x,0)\|_{L_2(\Gamma)} + 2\|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_t)}\right). \tag{10}$$

Представим отрезок $[0,T]$ в виде конечного объединения отрезков $[0, \frac{1}{2}t^*]$, $[\frac{1}{2}t^*, t^*]$,..., имеющих длину, не превышающую $\frac{1}{2}t^*$; для каждого из этих отрезков справедлива оценка вида (10). Совокупность этих неравенств образует рекуррентную систему относительно $\|y^N(x, \frac{1}{2}t^* k)\|_{L_2(\Gamma)}$ $(k = 1, 2, ...)$. Значит, используя соотношение $\|y^N(\cdot,t)\|_{L_2(\Gamma)} \leqslant \|y^N\|_{2,\Gamma_t}$ для любого t, получаем неравенство

$$\|y^N\|_{2,\Gamma_t} \leqslant C(t) \left(\|y^N(x,0)\|_{L_2(\Gamma)} + 2\|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_t)}\right), \tag{11}$$

справедливое для $t \in [0,T]$. Функция $C(t)$, $t \in [0,T]$, не зависит от N, определяется величиной T и постоянными a^*, β. Учитывая (9), из (11) следует

$$\|y^N\|_{2,\Gamma_t} \leqslant C(t) \left(\|\varphi\|_{L_2(\Gamma)} + 2\|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_t)}\right) \tag{12}$$

и в силу ограниченности функции $C(t)$ на $[0,T]$ ($C(t) \leqslant C^*$, $C^* > 0$) вытекает оценка

$$\|y^N\|_{2,\Gamma_T} \leqslant C^* \tag{13}$$

с независящей от N постоянной C^*.

Рассмотрим последовательность $\left\{y^N\right\}_{N\geqslant 1}$ с ограниченными в совокупности элементами y^N, как это следует из неравенств (13). Из последовательности $\left\{y^N\right\}_{N\geqslant 1}$ можно выделить подпоследовательность $\left\{y^{N_k}\right\}_{k\geqslant 1}$, слабо сходящуюся по норме $W^{1,0}(\Gamma_T)$ к некоторому элементу $y \in W^{1,0}(a,\Gamma_T)$ ($\left\{y^{N_k}\right\}_{k\geqslant 1}$ слабо сходится к y в $L_2(\Gamma_T)$ вместе с $\frac{\partial y^{N_k}}{\partial x}$). Остается показать, что элемент $y(x,t)$ является слабым решением задачи (3)–(5) ($\phi(x,t)=0$). Умножим соотношение (8) на абсолютно непрерывную на $[0,T]$ функцию $d_i(t)$ ($d_i(T)=0$), просуммируем по $i=\overline{1,N}$, результат проинтегрируем по t от 0 до T. После интегрирования первого слагаемого по частям по t получим тождество

$$-\int\limits_{\Gamma_T} y^N(x,t)\tfrac{\partial Y(x,t)}{\partial t}dxdt + \ell_T(y^N,Y) =$$

$$= \int\limits_{\Gamma} y^N(x,0)Y(x,0)dx + \int\limits_{\Gamma_T} f(x,t)Y(x,t)dxdt, \tag{14}$$

где $Y(x,t) = \sum\limits_{i=1}^{N} d_i(t)u_i(x)$. Обозначим через Σ множество всех функций $Y(x,t)$ с произвольными $d_i(t)$, обладающими указанными выше свойствами, и произвольными натуральными N. Множество Σ плотно в подпространстве функций, принадлежащих $W^1(a,\Gamma_T)$ и равных нулю при $t=T$. Это следует из плотности множества $\{u_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ в $W_2^1(a,\Gamma)$ и свойств $Y(x,t)$ (непрерывность $Y(x,t)\in\Sigma$ по $t\in[0,T]$, $Y(x,t)\in W^1(a,\Gamma)$ для каждого фиксированного $t\in[0,T]$ и $Y(x,T)=0$). Зафиксируем в (14) функцию $Y(x,t)=Y^*(x,t)\in\Sigma$ ($Y^*(x,t)=\sum\limits_{i=1}^{N^*} d_i^*(t)u_i(x)$) и по выбранной выше подпоследовательности $\{N_k\}_{k\geqslant 1}$, соответствующей подпоследовательности $\left\{y^{N_k}\right\}_{k\geqslant 1}$, перейдем к пределу, начиная с номера $N_k \geqslant N^*$. В результате получим соотношение (7) для предельной функции $y(x,t)$ при $\eta(x,t)=Y^*(x,t)$, а значит, в силу плотности множества Σ в подпространстве функций, принадлежащих $W^1(a,\Gamma_T)$ и равных нулю при $t=T$, $y(x,t)$ — обобщенное решение из $W^{1,0}(a,\Gamma_T)$ начально-краевой задачи (3)–(5) ($\phi(x,t)=0$). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Краевое условие (5) может быть неоднородным: $\phi(x,t)\neq 0$, $x\in\partial\Gamma$, $0<t<T$ ($\phi(x,t)\mid_{x\in\zeta}=\phi(t)_\zeta$ для каждого узла $\zeta\in\partial\Gamma$). Доказательство теоремы в этом случае дословно повторяет приведенные выше рассуждения. При этом предварительно вводится новая неизвестная функция $\widetilde{y}(x,t)=y(x,t)-\Phi(x,t)$ (здесь $\Phi(x,t)$ — произвольная функция из $L_2(\Gamma_T)$, имеющая обобщенную производную $\frac{\partial\Phi}{\partial x}\in L_2(\Gamma_T)$ и удовлетворяющая (почти всюду) неоднородному краевому условию (5)). В правой части соотношения (7) определения 2 для слабого решения $\widetilde{y}(x,t)$ добавляется слагаемое $-\int\limits_{\Gamma_T} b(x)\Phi(x,t)\eta(x,t)dxdt - \int\limits_{\Gamma_T} a(x)\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial x}\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial x}dxdt$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Достаточно установить, что при каждом фиксированном $t\in[0,T]$ след принадлежащего пространству $W^{1,0}(a,\Gamma_T)$ слабого решения задачи (3)–(5) ($\phi(x,t)=0$) суть элемент $W_2^1(a,\Gamma)$ и непрерывно зависит от t в норме $W_2^1(\Gamma)$, а значит, и в норме $L_2(\Gamma)$. Для анализа используются метод Фурье и, преследуя цель простоты изложения, несколько сузим пространство $L_{2,1}(\Gamma_T)$, заменив его на $CL_{2,1}(\Gamma_T) \subset L_{2,1}(\Gamma_T)$ ($CL_{2,1}(\Gamma_T)$ — пространство функций из $L_{2,1}(\Gamma_T)$, непрерывных по t в норме $L_2(\Gamma)$) и считая $f(x,t) \in CL_{2,1}(\Gamma_T)$ (последнее является необременительным условием в приложениях).

Учитывая разложения

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n u_n(x), \quad \varphi_n = \int_{\Gamma} \varphi(x) u_n(x) dx,$$
$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) u_n(x), \quad f_n(t) = \int_{\Gamma} f(x,t) u_n(x) dx, \ t \in [0,T],$$

решение задачи (3)–(5) ($\phi(x,t) = 0$) представляется (формально) в виде

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\lambda_n t} u_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t f_n(\tau) e^{-\lambda_n (t-\tau)} d\tau \, u_n(x). \tag{15}$$

Пусть

$$\widetilde{y}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\lambda_n t} u_n(x), \tag{16}$$

$$\widetilde{\widetilde{y}}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t f_n(\tau) e^{-\lambda_n (t-\tau)} d\tau \, u_n(x), \tag{17}$$

значит, $y(x,t) = \widetilde{y}(x,t) + \widetilde{\widetilde{y}}(x,t)$. Отметим, что сумма любого из конечных отрезков ряда (15) есть слабое решение из пространства $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$ системы (3), (4), удовлетворяющее краевому условию (5) ($\phi(x,t) = 0$). Дальнейшее заключается в исследовании характера сходимости ряда (15) (а значит, сходимостей рядов (16), (17)), которое основано на свойствах множества собственных значений $\{\lambda_n\}_{n \geqslant 1}$, системы обобщенных собственных функций $\{u_n(x)\}_{n \geqslant 1}$ и анализе норм $\|\widetilde{y}(x,t)\|_{L_2(\Gamma)}$, $\{\widetilde{y}(x,t), \widetilde{y}(x,t)\}_{\ell}^{1/2}$, $\|\widetilde{\widetilde{y}}(x,t)\|_{L_2(\Gamma)}$, $\{\widetilde{\widetilde{y}}(x,t), \widetilde{\widetilde{y}}(x,t)\}_{\ell}^{1/2}$, $t \in [0,T]$ [10, c. 180]. Покажем принадлежность $\widetilde{y}(x,t)$ и $\widetilde{\widetilde{y}}(x,t)$ пространству $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$.

1. Рассмотрим функцию $\widetilde{y}(x,t)$ и ее нормы:

$$\|\widetilde{y}(x,t)\|^2_{L_2(\Gamma)} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2 e^{-2\lambda_n t}, \tag{18}$$

$$\{\widetilde{y}(x,t), \widetilde{y}(x,t)\}_{\ell} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2 (\lambda_n - \lambda_0) e^{-2\lambda_n t}, \tag{19}$$

$$\int_0^t \{\widetilde{y}(x,t), \widetilde{y}(x,t)\}_{\ell} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2 \tfrac{\lambda_n - \lambda_0}{2\lambda_n} (1 - e^{-2\lambda_n t}) \tag{20}$$

(ряд (20) получается из ряда (19) формальным интегрированием по t в пределах от 0 до t). В силу $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2 = \|\varphi\|^2_{L_2(\Gamma)}$ сходится, что влечет равномерную сходимость относительно $t \in [0,T]$ рядов, стоящих в правых частях (18) и (20). Покажем, что сумма $\widetilde{y}(x,t)$ ряда в (16) является слабым решением задачи (3)–(5) ($f(x,t) = 0$, $\varphi(x,t) = 0$) из пространства $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$. Из указанной сходимости ряда (18) следует, что функция $\widetilde{y}(x,t)$ принадлежит $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$. Остается проверить, что

$\widetilde{y}(x,t)$ удовлетворяет интегральному тождеству (6) ($f(x,t)=0,\ \phi(x,t)=0$). Последнее вытекает из следующего. Совокупность функций $c_n(t)=e^{-\lambda_n t}$, $n=\overline{1,N}$, есть единственное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left(\frac{dc_n(t)}{dt}u_n,\eta\right)+\int\limits_{\Gamma}\left(a(x)c_n(t)\frac{du_n(x)}{dx}\frac{d\eta(x)}{dx}+b(x)c_n(t)u_n(x)\eta(x)\right)dx=0,\ \ n=\overline{1,N} \qquad (21)$$

(при любой функции $\eta(x)\in W^1_{2,0}(a,\Gamma)$), с начальным условием $c_n(0)=1,\ n=\overline{1,N}$, что является прямым следствием такого факта: обобщенные собственные функции $u_n(x)$ ($n=\overline{1,N}$) удовлетворяют тождеству $\ell(u,\eta)=\lambda(u,\eta)$ при $\lambda=\lambda_n$ для любой функции $\eta(x)\in W^1_{2,0}(a,\Gamma)$. Так как система $\{u_n(x)\}_{n\geqslant1}$ образует ортогональный базис в пространстве $W^1_{2,0}(a,\Gamma)$, то функцию $\eta(x)$ в (21) можно заменить на $u_n(x)$ для каждого фиксированного $n=\overline{1,N}$, отсюда получаем тождества при любом $t\in[0,T]$ ($n=\overline{1,N}$):

$$\left(\frac{de^{-\lambda_n t}u_n}{dt},u_n\right)+\int\limits_{\Gamma}\left(a(x)\frac{de^{-\lambda_n t}u_n(x)}{dx}\frac{du_n(x)}{dx}+b(x)e^{-\lambda_n t}u_n(x)u_n(x)\right)dx=0. \qquad (22)$$

Умножив каждое из соотношений (22) на свое φ_n и просуммировав по n от 1 до N, имеем

$$\left(\frac{\partial\widetilde{y}^N(x,t)}{\partial t},u_n\right)+\int\limits_{\Gamma}\left(a(x)\frac{\partial\widetilde{y}^N(x,t)}{\partial x}\frac{du_n(x)}{dx}+b(x)\widetilde{y}^N(x,t)u_n(x)\right)dx=0\qquad\forall t\in[0,T],$$

где $\widetilde{y}^N(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{N}\varphi_n e^{-\lambda_n t}u_n(x)$ — отрезок сходящего ряда (16), сумма которого равна $\widetilde{y}(x,t)$. Отсюда, учитывая сходимость рядов (18), (20), вытекает соотношение

$$\left(\frac{\partial\widetilde{y}(x,t)}{\partial t},u_n\right)+\int\limits_{\Gamma}\left(a(x)\frac{\partial\widetilde{y}(x,t)}{\partial x}\frac{du_n(x)}{dx}+b(x)\widetilde{y}(x,t)u_n(x)\right)dx=0\qquad\forall t\in[0,T],$$

из которого, дословно повторяя действия при получении и анализе тождества (14) (см. завершение доказательства теоремы 2), следует тождество

$$\int\limits_{\Gamma}\widetilde{y}(x,t)\eta(x,t)dx-\int\limits_{\Gamma_t}\widetilde{y}(x,t)\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}dxdt+\ell_t(\widetilde{y},\eta)=\int\limits_{\Gamma}\varphi(x)\eta(x,h)dx$$

при любом $t\in[0,T]$ и для любой функции $\eta(x,t)\in W^1(a,\Gamma_T)$, которое в соответствии с определением 1 означает, что $\widetilde{y}(x,t)$ есть слабое решение задачи (3)–(5) ($f(x,t)=0$, $\phi(x,t)=0$) из пространства $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$.

2. Покажем далее, что функция $\widetilde{\widetilde{y}}(x,t)$ принадлежит пространству $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ и является слабым решением задачи (3)–(5) ($\varphi(x)=0,\ \phi(x,t)=0$). При этом для простоты изложения несколько сузим пространство $L_{2,1}(\Gamma_T)$, заменив его на $CL_{2,1}(\Gamma_T)\subset L_{2,1}(\Gamma_T)$ ($CL_{2,1}(\Gamma_T)$ – пространство функций из $L_{2,1}(\Gamma_T)$, непрерывных по t в норме $L_2(\Gamma)$) и считая $f(x,t)\in CL_{2,1}(\Gamma_T)$. В прикладных задачах указанное предположение не обременительное.

Рассмотрим ряд (17) функции $\widetilde{\widetilde{y}}(x,t)$. Его сходимость исследуется так же, как и сходимость ряда (16). В силу $f(x,t)\in CL_{2,1}(\Gamma_T)$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n^2(t)=\|f(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Gamma)}$ сходится равномерно на $[0,T]$. Отсюда при условии $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}<\infty$ нетрудно установить равномерную сходимость на $[0,T]$ рядов

$$\|\widetilde{\widetilde{y}}(x,t)\|^2_{L\,_2(\Gamma)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(t) e^{-2\lambda_n t}, \tag{23}$$

$$\int_0^t \{\widetilde{\widetilde{y}}(x,t), \widetilde{\widetilde{y}}(x,t)\}_\ell dt = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_0) \int_0^t a_n(\varsigma)^2 e^{-2\lambda_n \varsigma} d\varsigma \tag{24}$$

($a_n(t) = \int\limits_0^t f_n(\tau) e^{\lambda_n \tau} d\tau$). Из указанной сходимости ряда (23) следует, что функция $\widetilde{\widetilde{y}}(x,t)$ принадлежит $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$. Повторяя приведенные выше рассуждения для функции $\widetilde{y}(x,t)$, используя при этом ряды (23) и (24), устанавливаем, что $\widetilde{\widetilde{y}}(x,t)$ — слабое решение задачи (3)–(5) ($\varphi(x) = 0$, $\phi(x,t) = 0$). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3. При «улучшении» свойств функции $f(x,t)$ по переменной t повышается уровень гладкости слабого решения $y(x,t)$ по $t > 0$. Действительно, сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2 = \|\varphi\|^2_{L\,_2(\Gamma)}$ влечет равномерную сходимость относительно $t \in [\epsilon, T]$ ($\epsilon > 0$) ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2 \lambda_n^2 e^{-2\lambda_n t} = \|\widetilde{y}_t(x,t)\|^2_{L\,_2(\Gamma)},$$

что следует из оценки $\varphi_n^2 \lambda_n^2 e^{-2\lambda_n t} < M\varphi_n^2$, справедливой для любых $n > n_0$ и $t \in [\epsilon, T]$ (M — не зависящая от t и n постоянная, существование n_0 вытекает из $\lambda_n e^{-\lambda_n t} \to 0$). Аналогичное заключение можно сделать и для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[f_n(t) e^{\lambda_n t)} - \lambda_n \int_0^t f_n(\tau) e^{\lambda_n \tau} d\tau \right]^2 e^{-2\lambda_n t} = \|\widetilde{\widetilde{y}}_t(x,t)\|^2_{L\,_2(\Gamma)},$$

учитывая равенство $\int\limits_0^t f_n(\tau) e^{\lambda_n \tau} d\tau = t f_n(t_1) e^{\lambda_n t_1}$ ($0 < t_1 < t$).

Теорема 3. *Начально-краевая задача* (3)–(5) *имеет единственное слабое решение в пространстве* $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть существуют два различных решения $\widetilde{y}_1(x,t)$, $\widetilde{y}_2(x,t)$ класса $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$, тогда их разность $\widetilde{y}(x,t) = \widetilde{y}_1(x,t) - \widetilde{y}_2(x,t)$ является слабым решением задачи (3)–(5) ($f(x,t) = 0$, $\varphi(x) = 0$, $\phi(x,t) = 0$) класса $W^{1,0}(a, \Gamma_T)$ ($V^{1,0}(a, \Gamma_T) \subset W^{1,0}(a, \Gamma_T)$). Для решений $\widetilde{y}_i(x,t)$ ($i = 1, 2$) будет справедливо вытекающее из (12) при $N \to \infty$ неравенство $\|\widetilde{y}\|_{2,\Gamma_t} \leqslant 0$, значит, $\widetilde{y}(x,t) = 0$ и решения $\widetilde{y}_1(x,t)$, $\widetilde{y}_2(x,t)$ совпадают. Теорема доказана.

Следствие. Слабое решение начально-краевой задачи (3)–(5) непрерывно зависит от исходных данных $f(x,t)$, $\varphi(x)$ и $\phi(x,t)$, что вытекает из аналогичной (12) оценки, если $\phi(x,t) \neq 0$. Тем самым показана корректность по Адамару начально-краевой задачи (3)–(5) в пространстве $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$.

4. Оптимальное граничное управление с запаздыванием. В пространстве $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$ рассмотрим эволюционное уравнение (3) с постоянным запаздыванием $h \in (0, T)$

$$\tfrac{\partial y(x,t)}{\partial t} - \tfrac{\partial}{\partial x}\left(a(x) \tfrac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right) + b(x) y(x,t) + c(x) y(x, t-h) = f(x,t), \tag{25}$$

здесь $x, t \in \Gamma_{h,T} = \Gamma_0 \times (h, T)$, коэффициент $c(x)$ — ограниченная измеримая на Γ функция. Каждое решение $y(x,t)$, $x, t \in \Gamma_h$, системы (25) определяется начальной функцией $\theta(x,t) \in V^{1,0}(a, \Gamma_h)$:

$$y(x,t)=\theta(x,t),\quad x,t\in\Gamma_h, \tag{26}$$

и краевым условием

$$a(x)\frac{\partial y}{\partial x}\mid_{\partial\Gamma_{h,T}}=v(x,t). \tag{27}$$

Получим начально-краевую задачу (25)–(27), слабое решение $y(x,t)$ которой определяет состояние $y(v)(x,t)$ системы (25) в пространстве $V^{1,0}(a,\Gamma_{h,T})$, $v(x,t)$ — граничное воздействие на систему (25).

Определение 3. *Слабым решением начально-краевой задачи* (25)–(27) *называется функция* $y(v)(x,t)\in V^{1,0}(a,\Gamma_T)$, *удовлетворяющая интегральному тождеству*

$$\int\limits_{\Gamma} y(x,t)\eta(x,t)dx-\int\limits_{\Gamma_{h,t}} y(x,t)\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}dxdt+\ell_{h,t}(y,\eta)+\int\limits_{\Gamma_{h,t}} c(x)y(x,t-h)\eta(x,t)dxdt=$$
$$=\int\limits_{\Gamma}\theta(x,h)\eta(x,h)dx+\int\limits_{\partial\Gamma_{h,t}} v(x,t)\eta(x,t)dxdt+\int\limits_{\Gamma_{h,t}} f(x,t)\eta(x,t)dxdt$$

при любом $t\in(h,T)$ *и для любой функции* $\eta(x,t)\in W^1(a,\Gamma_T)$*;* $\Gamma_{h,t}=\Gamma_0\times(h,t)$.

Представим уравнение (25) в более удобной для анализа форме [7, с. 270]. Пусть $Z: W^1(a,\Gamma_T)\to W^1(a,\Gamma_T)$ — линейный непрерывный оператор (*оператор запаздывания*), определенный соотношением

$$Zy=\begin{cases} y(x,t-h), & x,t\in\Gamma_{h,T},\\ 0, x,t\in\Gamma_h. \end{cases}$$

Зададим функцию $\theta(x,t)\in V^{1,0}(a,\Gamma_h)$, удовлетворяющую краевому условию $a(x)\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\mid_{\partial\Gamma_h}=v(x,t)$, и на Γ_T введем функцию

$$F(x,t)=\begin{cases} f(x,t), & x,t\in\Gamma_{h,T},\\ \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right)+b(x)\theta(x,t), & x,t\in\Gamma_h \end{cases}$$

(как понимать это выражение на Γ_h будет ясно ниже), и функцию $y_0(x)=\theta(x,0)$ (так что $y_0(x)\in L_2(\Gamma)$, так как $y_0(x)\in W^1(a,\Gamma)\subset L_2(\Gamma)$ в силу определения пространства $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ и $\theta(x,t)\in V^{1,0}(a,\Gamma_T)$). Тогда соотношения (25)–(27) примут вид

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)+b(x)y(x,t)+c(x)Zy(x,t)=F(x,t),\quad x,t\in\Gamma_T, \tag{28}$$

$$y(x,0)=y_0(x),\quad x\in\Gamma, \tag{29}$$

$$a(x)\frac{\partial y}{\partial x}\mid_{\partial\Gamma}=v(x,t). \tag{30}$$

Рассмотрим систему (28), состояние которой определяется как решение $y(v)(x,t)$ начально-краевой задачи (28)–(30) в пространстве $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$.

Определение 4. *Слабым решением начально-краевой задачи* (28)–(30) *называется функция* $y(v)(x,t)\in V^{1,0}(a,\Gamma_T)$, *удовлетворяющая интегральному тождеству*

$$\int\limits_{\Gamma} y(v)(x,t)\eta(x,t)dx-\int\limits_{\Gamma_t} y(v)(x,t)\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}dxdt\ +$$
$$+\ \ell_t(y(v),\eta)+\int\limits_{\Gamma_t} c(x)Zy(v)(x,t)\eta(x,t)dxdt=$$
$$=\int\limits_{\Gamma} y_0(x)\eta(x,h)dx+\int\limits_{\partial\Gamma_t} v(x,t)\eta(x,t)dxdt+\int\limits_{\Gamma_t} F(x,t)\eta(x,t)dxdt \tag{31}$$

при любом $t\in[0,T]$ *и для любой функции* $\eta(x,t)\in W^1(a,\Gamma_T)$.

Если функция $y(v)(x,t) \in V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ является слабым решением задачи (28)–(30), а значит, удовлетворяет тождеству (31), то она есть и слабое решение задачи (25)–(27). Действительно, при $t \in (0,h)$ тождество (31) в силу представлений $Zy(x,t)$ и $F(x,t)$ на Γ_h превращается в

$$\int_\Gamma y(v)(x,t)\eta(x,t)dx - \int_{\Gamma_t} y(v)(x,t)\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}dxdt + \ell_t(y(v),\eta) =$$

$$= \int_\Gamma y_0(x)\eta(x,h)dx + \int_{\partial\Gamma_t} v(x,t)\eta(x,t)dxdt + \int_{\Gamma_t} F(x,t)\eta(x,t)dxdt, \quad (32)$$

где

$$\int_{\Gamma_t} F(x,t)\eta(x,t)dxdt = \int_\Gamma \theta(x,t)\eta(x,t)dx - \int_{\Gamma_t} \theta(x,t)\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}dxdt \ + \\ + \ \ell_t(\theta,\eta) - \int_\Gamma \theta(x,0)\eta(x,h)dx - \int_{\partial\Gamma_t} c(x)\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\eta(x,t)dxdt,$$

откуда в силу первого утверждения теоремы 1 следует, что $y(v) \equiv \theta$ на Γ_h. При $t \in [h,T)$ в соотношении (31) сделаем следующие преобразования: прибавим и вычтем слагаемое $\int_\Gamma y(v)(x,h)\eta(x,t)dx$ и интегралы на $[0,t]$ представим в виде сумм интегралов на $[0,h]$ и $[h,t]$. На отрезке $[0,h]$ получим тождество, аналогичное (32), оставшиеся слагаемые, учитывая представление $Zy(x,t)$ на $\Gamma_{h,t}$, образуют соотношение вида

$$\int_\Gamma y(v)(x,t)\eta(x,t)dx - \int_{\Gamma_{h,t}} y(v)(x,t)\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}dxdt + \ell_{h,t}(y(v),\eta) \ + \\ + \int_{\Gamma_{h,t}} c(x)y(v)(x,t-h)\eta(x,t)dxdt = \int_\Gamma y(v)(x,h)\eta(x,h)dx + \\ + \int_{\partial\Gamma_{h,t}} v(x,t)\eta(x,t)dxdt + \int_{\Gamma_{h,t}} f(x,t)\eta(x,t)dxdt$$

при $t \in [h,T)$. Отсюда и из $y(v)(x,h) = \theta(x,h)$ (последнее следует из (26)) вытекает, что функция $y(v)(x,t)$ удовлетворяет определению 3. Утверждения теорем 1 и 3 остаются справедливыми и для начально-краевой задачи (28)–(30).

Пусть задано пространство $\mathbb{U} = L_2(\partial\Gamma_T)$ допустимых управлений $v(x,t) \in \mathbb{U}$ системы (28), которое также может иметь вид $\mathbb{U} = L_2(\partial\Gamma'_T)$, $\partial\Gamma'_T \subset \partial\Gamma_T$ (воздействие на систему осуществляется на части $\partial\Gamma'_T$ границы $\partial\Gamma_T$); $L_2(\partial\Gamma_T)$ — пространство наблюдений $Cy(v)$, являющихся граничными и имеющими важный для приложений вид $Cy(v) = My(v)|_{\partial\Gamma_T}$ ($M : L_2(\partial\Gamma_T) \to L_2(\partial\Gamma_T)$ — линейный непрерывный оператор, M^* — ему сопряженный оператор, C — оператор наблюдения), где $y(v)|_{\partial\Gamma_T}$ — след функции $y(v)$ на поверхности $\partial\Gamma_T$. Возможны и иные типы наблюдений, например финальное [2]. Определим функционал $J(v)$, требующий минимизации на $\mathbb{U}$:

$$J(v) = \|Cy(v) - z_0\|^2_{L_2(\partial\Gamma_T)} + (Nv,v)_\mathbb{U},$$

здесь $z_0(x,t) \in L_2(\partial\Gamma_T)$ — заданное наблюдение, $N : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ — линейный непрерывный эрмитов оператор, $(Nv,v)_\mathbb{U} \geqslant \varsigma\|v\|_\mathbb{U}$ ($\varsigma > 0$ — фиксированная постоянная). Присутствие слагаемого $(Nv,v)_\mathbb{U}$ в представлении функционала $J(v)$ гарантирует коэрцитивность квадратичной компоненты функционала $J(v)$ [5, с. 158].

Задача оптимального граничного управления *системой* (28) *заключается в том, чтобы отыскать* $\inf_{v\in\mathbb{U}_\partial} J(v)$ *на выпуклом замкнутом подмножестве* $\mathbb{U}_\partial \subset \mathbb{U}$.

Теорема 4. *Задача оптимального граничного управления системой* (28) *имеет единственное решение* $v^* \in \mathbb{U}_\partial$, *т. е.* $J(v^*) = \min_{v\in\mathbb{U}_\partial} J(v)$; $v^* \in \mathbb{U}_\partial$ — *оптимальное управление системой* (28).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу утверждения следствия теоремы 3 линейное отображение $v \to y(v)$ пространства допустимых управлений $\mathbb{U}$ в пространство состояний $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ системы (28) непрерывно. Функционал $J(v)$ определяется с помощью оператора $v \to y(v)$ перехода от граничного состояния v к состоянию $y(v)$ системы (28) и оператора $y(v) \to Cy(v)$ перехода от состояния $y(v)(x,t)$ к наблюдению $Cy(v) = My(v)|_{\partial\Gamma_T}$. Дальнейшее доказательство использует свойство коэрцитивности квадратичной компоненты функционала $J(v)$ на выпуклом замкнутом множестве $\mathbb{U}_\partial$ и почти дословно повторяет рассуждения, приведенные в работе [1].

5. Синтез оптимального граничного управления. Для системы (28) определим сопряженное состояние $\omega(x,t)$, учитывая представление сопряженного оператора $Z^* : W^1(a,\Gamma_T) \to W^1(a,\Gamma_T)$:

$$Z^* p = \begin{cases} p(x,t+h), & x,t \in \Gamma_{T-h}, \\ 0, & x,t \in \Gamma_{T-h,T}, \end{cases}$$

как слабое решение $\omega(x,t)$ начально-краевой задачи

$$-\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial x}\right) + b(x)\omega(x,t) + c(x)Z^*\omega(x,t) = 0, \tag{33}$$

$$\omega(x,T) = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{34}$$

$$a(x)\frac{\partial\omega}{\partial x}\,|_{\partial\Gamma_T} = M^*(My(v)(x,t) - z_0(x,t)) \tag{35}$$

в пространстве $W^1(a,\Gamma_T)$.

Определение 5. *Слабым решением начально-краевой задачи* (33)–(35) *называется функция $\omega(v)(x,t) \in W^1(a,\Gamma_T)$, удовлетворяющая интегральному тождеству*

$$-\int\limits_{\Gamma_T} \frac{\partial\omega(v)(x,t)}{\partial t}\zeta(x,t)dxdt + \ell_T(\omega(v),\zeta) + \int\limits_{\Gamma_T} c(x)Z^*\omega(v)(x,t)\zeta(x,t)dxdt =$$
$$= \int\limits_{\partial\Gamma_T} M^*(My(v)(x,t) - z_0(x,t))\zeta(x,t)dxdt \tag{36}$$

для любых функций $\zeta(x,t) \in W^{1,0}(a,\Gamma_T)$.

Для доказательства однозначной разрешимости задачи (34)–(36), а значит, (25)–(27), достаточно применить теоремы 1 и 3, заменив t на $T-t$. При этом необходимо учитывать специфику представления $Z^*\omega(v)(x,t)$ и сепарабельность пространства $W^1(a,\Gamma_T)$ [3, 6, 8].

Теорема 5. *Для того чтобы элемент $u(x) \in \mathbb{U}_\partial$ был оптимальным управлением системы* (28)*, а значит* (25)*, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись следующие соотношения*:

$$\int\limits_{\Gamma} y(u)(x,t)\eta(x,t)dx - \int\limits_{\Gamma_t} y(u)(x,t)\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}dxdt \; +$$
$$+ \;\ell_t(y(u),\eta) + \int\limits_{\Gamma_t} c(x)Zy(u)(x,t)\eta(x,t)dxdt =$$
$$= \int\limits_{\Gamma} y_0(x)\eta(x,h)dx + \int\limits_{\partial\Gamma_t} u(x,t)\eta(x,t)dxdt + \int\limits_{\Gamma_t} F(x,t)\eta(x,t)dxdt \tag{37}$$

при любом $t \in [0,T]$ и для любой функции $\eta(x,t) \in W^1(a,\Gamma_T)$;

$$-\int\limits_{\Gamma_T} \frac{\partial\omega(u)(x,t)}{\partial t}\zeta(x,t)dxdt + \ell_T(\omega(u),\zeta) + \int\limits_{\Gamma_T} c(x)Z^*\omega(u)(x,t)\zeta(x,t)dxdt =$$
$$= \int\limits_{\partial\Gamma_T} M^*(My(v)(x,t) - z_0(x,t))\zeta(x,t)dxdt \tag{38}$$

для любых функций $\zeta(x,t) \in W^{1,0}(a,\Gamma_T)$;

$$\int\limits_{\partial\Gamma_T} \left(\omega(u)(x,t) + Nu(x,t)\right)\left(v(x,t) - u(x,t)\right) dxdt \geqslant 0 \tag{39}$$

для любых $v \in \mathbb{U}_\partial$.

Здесь $y(u) \in V^{1,0}(a,\Gamma_T)$, $\omega(u) \in W^1(a,\Gamma_T)$ *и* $\omega(u)(x,T) = 0$, $x \in \Gamma$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с утверждением теоремы 1.3 [7, с. 18] требуется показать, что неравенство (39) равнозначно неравенству $J'(u)(\nu - u) \geqslant 0$ для любого $v \in \mathbb{U}_\partial$.

Исходя из представления функционала $J(v)$, получим ($Cy(v) = My(v)|_{\partial\Gamma_T}$)

$$J(u+\theta(v-u)) - J(u) = (My(u+\theta(v-u)) + My(u), M[y(u+\theta(v-u)) - y(u)]) - \\ - 2(z_0, M[y(u+\theta(v-u)) - y(u)]) + 2(Nu, v-u)_{\mathbb{U}}.$$

Деля последнее соотношение на θ, переходя к пределу при $\theta \to 0$ и учитывая соотношение $y'(u)(v-u) = y(v) - y(u)$ для любых $v, u \in \mathbb{U}_\partial$ (здесь $y'(u)$ — производная по Фреше функции состояния $y(u)(x,t)$) [2, лемма 2], находим

$$1/2J'(u)(\nu - u) = (My(u) - z_0, M(y(u) - y(v))) + (Nu, v-u)_{\mathbb{U}}. \tag{40}$$

Положив в (36) $v = u$ и $\zeta(x,t) = y(v)(x,t) - y(u)(x,t) \in V^{1,0}(a,\Gamma_T) \subset W^{1,0}(a,\Gamma_T)$, имеем

$$-\int\limits_{\Gamma_T} \tfrac{\partial\omega(u)(x,t)}{\partial t}[y(v)(x,t) - y(u)(x,t)]dxdt + \ell_T(\omega(u), y(v) - y(u)) + \\ + \int\limits_{\Gamma_T} c(x)Z^*\omega(v)(x,t)[y(v)(x,t) - y(u)(x,t)]dxdt = \\ = \int\limits_{\partial\Gamma_T} M^*(My(v)(x,t) - z_0(x,t))[y(v)(x,t) - y(u)(x,t)]dx. \tag{41}$$

В соотношении (31) положим $t = T$ и вычтем из него это же соотношение при $v = u$. Заменив $\eta(x,t)$ на $\omega(v)(x,t)$, получим ($\omega(v)(x,T) = 0$)

$$-\int\limits_{\Gamma_T} [y(v)(x,t) - y(u)(x,t)]\tfrac{\partial\omega(v)(x,t)}{\partial t}dxdt + \ell_T(y(v) - y(u), \omega) + \\ + \int\limits_{\Gamma_T} c(x)Z[y(v)(x,t) - y(u)(x,t)]\omega(v)(x,t)dxdt = \\ = \int\limits_{\partial\Gamma_T} [v(x,t) - u(x,t)]\omega(v)(x,t)dxdt. \tag{42}$$

Сравнивая в (41) и (42) стоящие справа выражения, учитывая симметричность формы $\ell_T(\cdot,\cdot)$ и представления операторов Z, Z^*, приходим к равенству

$$\int\limits_{\Gamma} M^*(My(v)(x,t) - z_0(x,t))[y(v)(x) - y(u)(x,t)]dx = \\ = \int\limits_{\partial\Gamma_T} \omega(u)(x,t)\left(v(x,t) - u(x,t)\right) dxdt,$$

из которого в силу (39) и представления (40) следует $J'(u)(\nu - u) \geqslant 0$. Соотношения (37), (38) очевидны. Теорема доказана.

Задачу синтеза оптимального граничного управления рассмотрим для случая отсутствия ограничений на управление: $\mathbb{U}_\partial$ совпадает с $\mathbb{U}$. Тогда в соотношении (39) можно положить $v = u \pm \nu$, и в силу произвольности $v \in \mathbb{U}$ оно трансформируется в равенство, а значит, $\omega(u)(x,t) + Nu(x,t) = 0$. Исключая с его помощью u

$(u = -N^{-1}\omega(u)(x,t))$, приходим к выводу, что оптимальное управление определяется из решения системы двух интегральных тождеств (вариационных соотношений)

$$\int_\Gamma y(x,t)\eta(x,t)dx - \int_{\Gamma_t} y(x,t)\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}dxdt + \ell_t(y,\eta) + \int_{\Gamma_t} c(x)Zy(x,t)\eta(x,t)dxdt =$$
$$= \int_\Gamma y_0(x)\eta(x,h)dx - \int_{\partial\Gamma_t} N^{-1}\omega(x,t)\eta(x,t)dxdt + \int_{\Gamma_t} F(x,t)\eta(x,t)dxdt$$

при любом $t \in [0,T]$ и для любой функции $\eta(x,t) \in W^1(a,\Gamma_T)$;

$$-\int_{\Gamma_T} \frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}\zeta(x,t)dxdt + \ell_T(\omega,\zeta) + \int_{\Gamma_T} c(x)Z^*\omega(x,t)\zeta(x,t)dxdt =$$
$$= \int_\Gamma C^*(Cy(u)(x,t) - z_0(x,t))\zeta(x,t)dx$$

для любых функций $\zeta(x,t) \in W^{1,0}(a,\Gamma_T)$. Оптимальное управление имеет вид

$$u(x,t) = -N^{-1}\omega(x,t). \tag{43}$$

Соотношение (43) осуществляет синтез оптимального граничного управления системы (28) (а значит, (25)) с запаздыванием: оптимальное управление определяется через сопряженное состояние $\omega(u)(x,t)$ этой системы.

6. Заключение. Рассмотрена распространенная в приложениях задача граничного управления системой с запаздыванием и распределенными параметрами на сети (пп. 3, 4), представлены условия синтеза оптимального управления в терминах сопряженного состояния системы (25) и получен аналог (формула (43)) известных для конечномерного случая результатов Калмана. Описанный метод применим и ко многим задачам оптимизации дифференциальных систем, состояние которых обусловливается слабыми решениями эволюционных уравнений на сетях [6, 11–13]. В работах [14, 15] рассмотрены другие подходы при анализе прикладных задач с запаздыванием и родственных им задач стабилизации [16, 17], имеющие, однако, аналогичную трактовку условий существования оптимального управления. Отметим также, что изучаемая задача допускает в представлении эволюционной системы (25) особенности в виде стохастической компоненты [18] и разрывной нелинейности [19, 20].

Литература

1. *Провоторов В. В.* Оптимальное управление параболической системой с распределенными параметрами на графе // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. Вып. 3. С. 154–163.

2. *Подвальный С. Л., Провоторов В. В.* Стартовое управление параболической системой с распределенными параметрами на графе // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. Вып. 3. С. 126–142.

3. *Provotorov V. V.* Boundary control of a parabolic system with delay and distributed parameters on the graph // Intern. conference “Stability and Control Processes” in memory of V. I. Zubov (SCP). Saint Petersburg: Saint Petersburg State University, 2015. P. 126–128.

4. *Podvalny S. L., Provotorov V. V.* The questions of controllability of a parabolic systems with distributed parameters on the graph // Intern. conference “Stability and Control Processes” in memory of V. I. Zubov (SCP). Saint Petersburg: Saint Petersburg State University, 2015. P. 117–119.

5. *Провоторов В. В., Волкова А. С.* Начально-краевые задачи с распределенными параметрами на графе. Воронеж: Научная книга, 2014. 188 с.

6. *Provotorov V. V.* Boundary control of a parabolic system with distributed parameters on a graph in the class of summable functions // Automation and Remote Control. 2015. Vol. 76, N 2. P. 318–322.

7. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / пер. с фр. Н. Х. Розова; под ред. Р. В. Гамкрелидзе. М.: Мир, 1972. 414 с. (*Lions J. L.* Controle optimal de sistemes gouvernes par des eqations aux derivees partielles.)

8. *Волкова А. С., Провоторов В. В.* Обобщенные решения и обобщенные собственные функции краевых задач на геометрическом графе // Известия высших учебных заведений. Математика. 2014. № 3. С. 3–18.

9. *Провоторов В. В.* Разложение по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля на графе-пучке // Известия высших учебных заведений. Математика. 2008. № 3. С. 50–62.

10. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.

11. *Подвальный С. Л., Провоторов В. В.* Оптимизационные задачи для эволюционных систем с распределенными параметрами на графе // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2014): сб. трудов VII Междунар. конференции. Воронеж: Научная книга, 2015. С. 282–286.

12. *Подвальный С. Л., Провоторов В. В.* Оптимизация по стартовым условиям параболической системы с распределенными параметрами на графе // Системы управления и информационные технологии. 2014. Т. 58, № 4. С. 70–74.

13. *Volkova A. S., Gnilitskaya Yu. A., Provotorov V. V.* On the solvability of Boundary-Value problems for parabolic and hyperbolic equations on geometrical graphs // Automation and Remote Control. 2014. Vol. 75, N 2. P. 405–412.

14. *Александров А. Ю., Жабко А. П.* Об асимптотической устойчивости решений многосвязных дифференциально-разностных систем запаздывающего типа // Системы управления и информационные технологии. 2013. Т. 54, № 4. С. 4–7.

15. *Александров А. Ю., Жабко А. П.* Об устойчивости решений одного класса нелинейных разностных систем // Сиб. матем. журн. 2003. Т. 44, № 6. С. 1217–1228.

16. *Веремей Е. И., Корчанов В. М.* Многоцелевая стабилизация динамических систем одного класса // Автоматика и телемеханика. 1988. № 9. С. 126–137.

17. *Веремей Е. И., Сотникова М. В.* Стабилизация плазмы на базе прогноза с устойчивым линейным приближением // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2011. Вып. 1. С. 116–133.

18. *Карелин В. В.* Штрафные функции в задаче управления процессом наблюдения // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2010. Вып. 4. С. 109–114.

19. *Потапов Д. К.* Оптимальное управление распределенными системами эллиптического типа высокого порядка со спектральным параметром и разрывной нелинейностью // Известия РАН. Сер. ТиСУ. 2013. № 2. С. 19–24.

20. *Kamachkin A. M., Yevstafyeva V. V.* Oscillations in a relay control system at an external disturbance // Control Applications of Optimization–2000: Proceedings of the 11th IFAC Workshop. 2000. Vol. 2. P. 459–462.

Для цитирования: *Провоторов В. В., Провоторова Е. Н.* Синтез оптимального граничного управления параболической системы с запаздыванием и распределенными параметрами на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. Вып. 2. С. 209–224. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2017.207

References

1. Provotorov V. V. Optimal'noe upravlenie parabolicheskoi sistemoi s raspredelennymi parametrami na grafe [Optimal control of parabolic systems with distributed parameters on the graph]. *Vestnik of Saint Petersburg State University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2014, iss. 3, pp. 154–163. (In Russian)

2. Provotorov V. V. Startovoe upravlenie parabolicheskoi sistemoi s raspredelennymi parametrami na grafe [Start control of parabolic systems with distributed parameters on the graph]. *Vestnik of Saint Petersburg State University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2015, iss. 3, pp. 126–142. (In Russian)

3. Provotorov V. V. Boundary control of a parabolic system with delay and distributed parameters on the graph. *Intern. conference "Stability and Control Processes" in memory of V. I. Zubov* (SCP). Saint Petersburg, Saint Petersburg State University Press, 2015, pp. 126–128.

4. Podvalny S. L., Provotorov V. V. The questions of controllability of a parabolic systems with distributed parameters on the graph. *Intern. conference "Stability and Control Processes" in memory of V. I. Zubov* (SCP). Saint Petersburg, Saint Petersburg State University Press, 2015, pp. 117–119.

5. Provotorov V. V., Volkova A. S. Nachal'no-kraevie zadachi s raspredelennimi parametrami na grafe [Initial-boundary value problems with distributed parameters on the graph]. Voronezh, Nauchnaya kniga Publ., 2014, 188 p. (In Russian)

6. Provotorov V. V. Boundary control of a parabolic system with distributed parameters on a graph in the class of summable functions. *Automation and Remote Control*, 2015, vol. 76, no. 2, pp. 318–322.

7. Lions J.-L. *Controle optimal de sistemes gouvernes par des eqations aux derivees partielles* [*Optimum control of the systems described by the equations with private derivative*]. Paris, Dunod Gauthier-Villars, 1968, 402 p. (Russ. ed.: *Lions J.-L. Optimal'noe upravlenie sistemami, opisyvaemymi uravnenijami s chastnymi proizvodnymi.* Moscow, Mir Publ., 1972, 414 p.).

8. Volkova A. S., Provotorov V. V. Obobshonnie reshenija i obobshonnie sobstvennie funkcii kraevih zadach na geometricheskom grafe [Generalized solutions and generalized eigenfunctions of the boundary value problems on a geometric graph]. *Izvestia vyssh. ucheb. zavedenij. Mathematica* [*Proceedings of Higher Educational Institutions. Mathematics*], 2014, no. 3, pp. 3–18. (In Russian)

9. Provotorov V. V. Razlozhenie po sobstvennim funkcijam zadachi Shturma—Liuvillja na grafe-puchke [The expansion in eigenfunctions of the Sturm—Liouville problem on a graph bundle]. *Izvestia vyssh. ucheb. zavedenij. Mathematica* [*Proceedings of Higher Educational Institutions. Mathematics*], 2008, no. 3, pp. 50–62. (In Russian)

10. Ladyzhenskaya O. A. *Kraevie zadachi matematicheskoi fiziki* [*Boundary-value problems of mathematical physics*]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 407 p. (In Russian)

11. Podval'ny S. L., Provotorov V. V. Optimizatsionnye zadachi dlia evoliutsionnykh sistem s raspredelennymi parametrami na grafe [Optimal problems for evolution system with distributed parameters on the graph]. *Sovremennye metody prikladnoi matematiki, teorii upravleniia i komp'iuternykh tekhnologii* (*PMTUKT-2014*)*: sb. trudov VII Mezhdunar. konferentsii* [*Modern methods of Applied Mathematics, Control Theory and Computer Technology* (*PMTUKT-2014*)]. *VII Intern. scientific conference.* Voronezh, Nauchnaia kniga Publ., 2015, pp. 282–286. (In Russian)

12. Podval'ny. S. L., Provotorov V. V. Optimizacija po startovim uslovijam parabolicheskoi sistemi s raspredelennimi parametrami na grafe [Optimization for starting conditions of the parabolic system with distributed parameters on the graph]. *Control systems and information technologies*, 2014, vol. 58, no. 4, pp. 70–74. (In Russian)

13. Volkova A. S., Gnilitskaya Yu. A., Provotorov V. V. On the solvability of Boundary-Value problems for parabolic and hyperbolic equations on geometrical graphs. *Automation and Remote Control*, 2014, vol. 75, no. 2, pp. 405–412.

14. Aleksandrov A. Yu., Zhabko A. P. Ob asimptoticheskoi ustoichivosti reshenii nelineinyh sistem s zapazdyvaniem [On asymptotic stability of solutions of nonlinear systems with delay]. *Automation and Remote Control*, 2013, vol. 54, no. 4, pp. 4–7. (In Russian)

15. Aleksandrov A. Yu., Zhabko A. P. Ob ustoichivosti reshenii odnogo klassa nelineinyh sistem s zapazdyvaniem [On the stability of solutions of a class nonlinear systems with delay]. *Siberian Mathematical Journal*, 2003, vol. 44, no. 6, pp. 1217–1228. (In Russian)

16. Veremey E. I., Korchanov V. M. Mnogocelevaja stabilizacija dinamicheskih sistem odnogo klassa [A multipurpose stabilization of dynamical systems of a class]. *Automation and Remote Control*, 1988, no. 9, pp. 126–137. (In Russian)

17. Veremey E. I., Sotnikova M. V. Stabilizacija plazmy na baze prognoza s ustojchivym linejnym priblizheniem [Plasma stabilization on the basis of the forecast with steady linear approach]. *Vestnik of Saint Petersburg State University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2011, iss. 1, pp. 116–133. (In Russian)

18. Karelin V. V. Shtrafnye funkcii v zadache upravlenija processom nabljudenija [Penal functions in a problem of management of supervision process]. *Vestnik of Saint Petersburg State University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2010, iss. 4, pp. 109–114. (In Russian)

19. Potapov D. K. Optimal'noe upravlenie raspredelennymi sistemami ellipticheskogo tipa vysokogo porjadka so spektral'nym parametrom i razryvnoi nelineinost'u [Optimal control of distributed high order systems of elliptic type with a spectral parameter and a discontinuous nonlinearity]. *Izvestia RAN. TiSU* [*Proceedings of Russian Academy of Sciences. Series TeSU*], 2013, no. 2, pp. 19–24. (In Russian)

20. Kamachkin A. M., Yevstafyeva V. V. Oscillations in a relay control system at an external disturbance. *Control Applications of Optimization–2000. Proceedings of the 11th IFAC Workshop*, 2000, vol. 2, pp. 459–462.

For citation: Provotorov V. V., Provotorova E. N. Synthesis of optimal boundary control of parabolic systems with delay and distributed parameters on the graph. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2017, vol. 13, iss. 2, pp. 209–224. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2017.207

Статья рекомендована к печати проф. А. П. Жабко.

Статья поступила в редакцию 31 июля 2016 г.

Статья принята к печати 11 апреля 2017 г.